汕头大学 2021 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：612

科目名称：数学分析

适用专业：数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

1. 判断下列极限是否存在。如果存在，求其值。如果不存在，请解释原因。(每题 5 分)

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$;

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\tan(x^2+y^2)}{\sin(xy)}$;

（3）$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(2021\pi x)}{\sin(2020\pi x)}$;

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\left(\sqrt{x^{2020}+2021}\right)-\sin\left(\sqrt{x^{2020}-2021}\right)\right)$。

2. 计算下列积分。(每题 5 分)

（1）$\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz$

（2）$\int_C\left(\frac{y}{x^2+y^2}+y\cos(xy)-\sin(x)\right)dx+\left(x\cos(xy)+\cos(y)-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$，其中$C$是平面上以原点为圆心、取逆时针定向的单位圆周。

3. （15 分）求函数$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-xyz$在空间闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le1\}$$

上的最大值、最小值、最大值点和最小值点。

4. （15 分）判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^p\sin(nx)$$

的敛散性（绝对收敛、条件收敛或发散）并说明理由。这里$x\in(0,\pi)$，$p>0$。

5. （15 分）求函数$f(x)=\int_{-x}^{x}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t^3\right)dt$在$x=0$处的幂级数展开式。

6. （15 分）求函数$f(x)=\arccos(\sin(x))$ 傅里叶展开式。

7. （15 分）设数列$\{a_n\}$收敛到 1， 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i a_i}{n^2}$。

8. （15 分）设$f(x), g(x)$是区间$[0,2]$上的连续可微函数，且$f(0)=f(2)=1$及$f(1)=-1$。证明：存在$\xi\in(0,2)$使得 $f'(\xi)=g'(\xi)f(\xi)$。

9. （15 分）设函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$一致连续，证明：函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}$在区间$[1,+\infty)$上有界。反之是否成立？

10. （15 分）设Ω是平面上的有界区域，$u(x,y)$是$\overline{\Omega}$ 上的连续函数，且在Ω上二阶连续可微，并满足：

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-u=0。$$

证明：若 u 在Ω的边界$\partial\Omega$上非负，则 u 在整个区域Ω上非负。